S E S 2 0 1 4
Tenth Anniversary Scientific Conference with International Participation
SPACE, ECOLOGY, SAFETY
12 – 14 November 2014, Sofia, Bulgaria

МЕТОД НА ОСКУЛИРАЩИТЕ ЕЛЕМЕНТИ ЗА ИЗУЧАВАНЕ ДВИЖЕНИЕТО НА ЕКВАТОРИАЛЕН ЕЛИПСОВИДЕН СПЪТНИК НА ЗЕМЯТА ПРИ НАЛИЧИЕ НА ДИНАМИЧНА СИМЕТРИЯ

Костадин Шейретски[1], Румен Шкевов[2], Николай Ерохин[3]

[1]Университет за национално и световно стопанство
[2]Институт за космически изследвания и технологии – Българска академия на науките
[3]Институт за космически изследвания – Руска академия на науките
e-mail: ksheiretsky@space.bas.bg

Ключови думи: *Небесна механика, асимптотични методи, нелинейни диференциални уравнения*

Резюме: *Разгледано е движението на екваториален елипсовиден спътник в частен случай на симетрия на формата му : $A = C$. Използван е методът на оскулиращите елементи за определяне еволюцията на орбиталните параметри с времето. Изведена е обща формула за прецесията на спътници движещи се в централно гравитационно поле.*

OSCULATING ELEMENTS' METHOD FOR STUDYING THE EARTH'S EQUATORIAL ELLIPTICAL SATELLITE'S MOVEMENT IN A SPECIAL CASE OF DYNAMIC SYMMETRY

Kostadin Sheiretsky[1], Rumen Shkevov[2], Nikolay Erokhin[3]

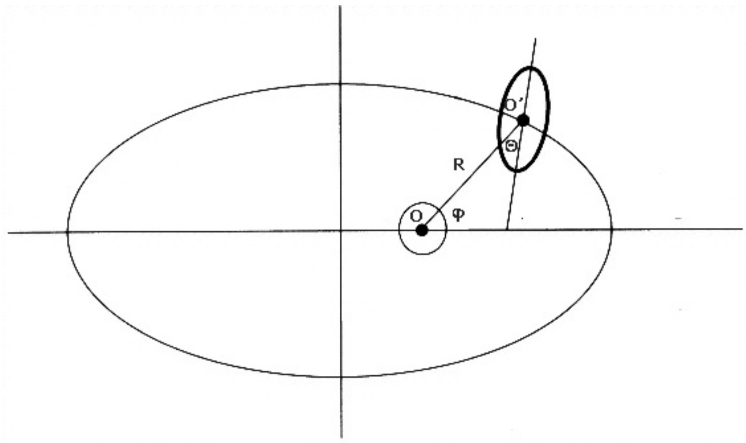
[1]University of National and World Economy
[2]Space Research and Technology Institute – Bulgarian Academy of Sciences
[2]Space Research Institute – Russian Academy of Sciences
e-mail: ksheiretsky@space.bas.bg

Keywords: *Celestial mechanics, Asymptotic methods, Nonlinear differential equations*

Abstract: *The equatorial elliptical satellite's movement is examined in a special case of dynamic symmetry between the two semi axis A=C. The method of osculating elements' is used for determing the evolution's orbit parameters (with) over time. A common formula for the satellite's precession, moving in the central gravity field is deduced.*

Въведение

Определяме положението на центъра на масата на спътника O' посредством полярни координати R, φ, с център на к.с. O съвпадащ с центъра на планетата, а положението на една от централните оси на инерция на спътника спрямо радиус-вектора отбелязваме с ъгъл Θ (Фиг.1).



Фиг. 1. Дефиниране на полярната координатна система.

Движението на спътник по екваториалната равнина на Земята, се осъществява под действието на силовата функция [1]

$$
(1)\qquad U=-\frac{\mu m}{R}-\frac{\mu m\varepsilon R_e^{\,2}}{3R^3}-\frac{1}{2}\frac{\mu}{R^3}\left[\sin^2\Theta(B+C-2A)+\cos^2\Theta(A+B-2C)\right]-
$$
$$
-\frac{1}{2}\frac{\mu\varepsilon R_e^{\,2}}{R^5}\left[\sin^2\Theta(2B+2C-3A)+\cos^2\Theta(2A+2B-3C)\right]+\frac{1}{2}\frac{\mu\varepsilon R_e^{\,2}}{R^5}(C+A-B),
$$

където $\mu=M\gamma$. M -маса на планетата, γ - универсална гравитационна константа, R_e - екваториален радиус на Земята, A,B,C са главните инерчни моменти на спътника, m - маса на спътника.

В сила е и уравнението на Ойлер

$$
(2)\qquad B\frac{d}{dt}\left(\dot{\theta}+\dot{\varphi}\right)+\frac{\mu}{R^3}(A-C)\left[3+5\varepsilon\frac{R_e^{\,2}}{R^2}\right]\sin\Theta\cos\Theta=0\,.
$$

Описването на динамичната система може да се сведе до задача за движението на спътника в централно поле, ако съществува определен тип динамична симетрия $A=C$. Изразът за потенциалната енергия зависи само от разстоянието до масовия център на спътника.

$$
(3)\qquad U=-\frac{\mu m}{R}-\frac{\mu m\varepsilon R_e^{\,2}}{3R^3}-\frac{1}{2}\frac{\mu}{R^3}(B-A)-\frac{3}{2}\frac{\mu\varepsilon R_e^{\,2}}{R^5}(B-A).
$$

Следователно пълната енергия на системата е

$$
(4)\qquad \frac{1}{2}m\left(\dot{R}^2+R^2\dot{\varphi}^2\right)+\frac{1}{2}B\left(\dot{\theta}+\dot{\varphi}\right)^2-\frac{\mu m}{R}-\frac{\mu m\varepsilon R_e^{\,2}}{3R^3}-\frac{1}{2}\frac{\mu}{R^3}(B-A)-\frac{3}{2}\frac{\mu\varepsilon R_e^{\,2}}{R^5}(B-A).
$$

От уравнението на Ойлер, веднага следва, че

$$
(5)\qquad \dot{\Theta}+\dot{\varphi}=const.
$$

Понеже полето в което се движи спътникът е централно, тогава се запазва и моментът на импулса на орбиталното движение

$$
(6)\qquad MR^2\dot{\varphi}=const.=C\,.
$$

При такова приближение, големината на прецесията на перицентъра е

$$
(7)\qquad \Delta\omega_\pi=\frac{6\pi}{P^2}\left[\frac{\varepsilon R_e^{\,2}}{3}+\frac{1}{2}\frac{(B-A)}{m}\right].
$$

Използване на метода на оскулиращите елементи

За разлика от Кеплеровото движение на спътник, смутеното движение се определя от диференциални уравнения, които в общия случай са неинтегруеми [2]. Методът на оскулиращите елементи е предложен от Лагранж. Oskulatio (лат.) значи целувам, като се има предвид близостта на оскулиращите елементи до действителните величини характеризиращи системата. Тъй като смущаващите сили са много по-малки в сравнение с основната сила на Нютоновото привличане, трябва да се очаква, че смутеното движение малко се различава от несмутеното Кеплерово движение. Основно се оказва допускането, че движението се извършва по някакъв вид елиптична орбита, но орбиталните елементи не са постоянни, а се менят с времето. Получената „елипса” се нарича оскулираща елипса, а самите нейни елементи – оскулиращи елементи.

Уравненията на оскулиращите елементи в случая на централна смущаваща сила имат вида [2]:

(8)
$$\frac{de}{dt} = \sqrt{\frac{P}{\mu}} S(R) \sin \nu ,$$
$$\frac{d\omega}{dt} = -\frac{1}{e}\sqrt{\frac{P}{\mu}} S(R) \cos \nu ,$$
$$\frac{dP}{dt} = 0 .$$

Тук $S(R)$ е ускорението на смущаващата сила, e, P са съответно, ексцентрицитета на оскулиращата елипса и нейния фокален параметър. Абсолютното значение на радиус-вектора се задава с формулата

(9)
$$R = \frac{P}{1 + e\cos\nu} .$$

Вижда се, че $P = P_0 = const.$, т.е. фокалният параметър на екваториалната орбита остава постоянен. Това свойство се проявява при произволни централни смущения.
Конкретният вид на изразите в случая са

(10)
$$\frac{de}{dt} = -\sqrt{\mu P}\left[\frac{\varepsilon R_e^{\,2}}{R^4} + \frac{3}{2R^4}\frac{(B-A)}{m} + \frac{15}{2}\frac{\varepsilon R_e^{\,2}}{R^6}\frac{(B-A)}{m}\right]\sin\nu ,$$
$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{\sqrt{\mu P}}{e}\left[\frac{\varepsilon R_e^{\,2}}{R^4} + \frac{3}{2R^4}\frac{(B-A)}{m} + \frac{15}{2}\frac{\varepsilon R_e^{\,2}}{R^6}\frac{(B-A)}{m}\right]\cos\nu .$$

Целесъобразно е да се премине към диференциали не по времето, а по истинската аномалия ν. Отчитаме факта, че

(11) $\varphi = \nu + \omega$, $R^2\dot{\varphi} = \sqrt{\mu P}$,

оттук следва:

(12)
$$\frac{d\nu}{dt} = \frac{\sqrt{\mu P}}{R^2} - \frac{\sqrt{\mu P}}{e}\left[\frac{\varepsilon R_e^{\,2}}{R^4} + \frac{3}{2R^4}\frac{(B-A)}{m} + \frac{15}{2}\frac{\varepsilon R_e^{\,2}}{R^6}\frac{(B-A)}{m}\right]\cos\nu .$$

Търсеният вид на уравненията е:

(13)
$$\frac{de}{d\nu} = -\frac{\sqrt{\mu P}\left[\frac{\varepsilon R_e^{\,2}}{R^4} + \frac{3}{2R^4}\frac{(B-A)}{m} + \frac{15}{2}\frac{\varepsilon R_e^{\,2}}{R^6}\frac{(B-A)}{m}\right]\sin\nu}{\frac{\sqrt{\mu P}}{R^2} - \frac{\sqrt{\mu P}}{e}\left[\frac{\varepsilon R_e^{\,2}}{R^4} + \frac{3}{2R^4}\frac{(B-A)}{m} + \frac{15}{2}\frac{\varepsilon R_e^{\,2}}{R^6}\frac{(B-A)}{m}\right]\cos\nu} ,$$

(14)
$$\frac{d\omega}{d\nu} = \frac{\frac{\sqrt{\mu P}}{e}\left[\frac{\varepsilon R_e^{\,2}}{R^4} + \frac{3}{2R^4}\frac{(B-A)}{m} + \frac{15}{2}\frac{\varepsilon R_e^{\,2}}{R^6}\frac{(B-A)}{m}\right]\cos\nu}{\frac{\sqrt{\mu P}}{R^2} - \frac{\sqrt{\mu P}}{e}\left[\frac{\varepsilon R_e^{\,2}}{R^4} + \frac{3}{2R^4}\frac{(B-A)}{m} + \frac{15}{2}\frac{\varepsilon R_e^{\,2}}{R^6}\frac{(B-A)}{m}\right]\cos\nu} .$$

Въвеждаме два малки в сравнение с единицата параметъра:

$\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon R_e^{\,2}}{3P^2}$ и $\varepsilon_2 = \frac{(B-A)}{2mP^2}$, нека $\varepsilon_0 = \varepsilon_1 + \varepsilon_2$.

Следователно в приближение до първата степен на параметъра ε_0, уравненията се записват така:

(15) $$\frac{d\omega}{d\nu}=\frac{3\varepsilon_0}{e_0}(1+e\cos\nu)^2\cos\nu$$

(16) $$\frac{de}{d\nu}=-3\varepsilon_0(1+e\cos\nu)^2\sin\nu$$

Решението на уравнение (15) е

(17) $$\omega=3\varepsilon_0\left(\nu+\left(\frac{1}{e_0}+\frac{3e_0}{2}\right)\sin\nu+\frac{\sin 2\nu}{2}+\frac{e_0\sin 3\nu}{6}\right).$$

Решението на уравнение (16) се дава с израза:

(18) $$e\approx e_0-6\varepsilon_0\sin^2\frac{\nu}{2}$$

От (18) следва, че в оскулиращия перигей $e=e_{\max}=e_0$. В оскулиращия апогей $e=e_{\min}<e_0$.

Енергията на смутеното движение, записана в оскулиращи елементи е:

(19) $$\frac{m\mu(e^2-1)}{2P}-\frac{\mu m\varepsilon R_e{}^2}{3R^3}-\frac{1}{2}\frac{\mu}{R^3}(B-A)-\frac{3}{2}\frac{\mu\varepsilon R_e{}^2}{R^5}(B-A)=H.$$

От тук следва, че в оскулиращия перигей $e=e_{\max}=e_0$. В оскулиращия апогей $e=e_{\min}<e_0$.

Прецесията на спътник, движещ се в централно поле и потенциал близък до Нютоновия, може да се изведе сравнително лесно, като се използва фактът, че орбитата на спътника не се отличава много от кеплеровата.

Прецесия на спътник в централно гравитационно поле

Ще докажем по-общо твърдение, чрез което да пресмятаме прецесията за различен тип смущаващи потенциали [3÷5].

Нека е дадено поле с потенциал от вида

(20) $$U=-\frac{k}{R}+\bar{\beta}R^n,\ [\bar{\beta}]<<1,$$

където $n\in Z$. Поставя се задачата да се намери ъгълът на прецесия на материална точка движеща се в полето.

От диференциалното уравнение за траекторията, може да запише съгласно [3]:

(21) $$\Delta\varphi=\int_{R_{\min}}^{R_{\max}}\frac{\frac{G}{R^2}}{\sqrt{2m\left(E+\frac{k}{R}-\delta U\right)-\frac{G^2}{R^2}}}dR=-2\frac{\partial}{\partial G}\int_{R_{\min}}^{R_{\max}}\sqrt{2m\left(E+\frac{k}{R}-\delta U\right)-\frac{G^2}{R^2}}dR,$$

където сме положили $\bar{\beta}R^n=\delta U$, G е моментът на импулса на тялото. Разлагаме подинтегралния израз по степените на δU. Нулевият член на разложението дава 2π, а члена от първи ред се представя с израза:

(22) $$\delta\varphi=\frac{\partial}{\partial G}\int_{R_{\min}}^{R_{\max}}\frac{2m\delta U}{\sqrt{2m\left(E+\frac{k}{R}\right)-\frac{G^2}{R^2}}}dR=\frac{\partial}{\partial G}\left(\frac{2m}{G}\int_0^{\pi}R^2\delta U d\varphi\right).$$

Използваме факта, че орбитата се отличава малко от Кеплеровата, тогава може да запишем уравнението за R:

(23) $$R=\frac{P}{1+e\cos\varphi}.$$

Нека положим

(24) $\lambda = -(2+n)$.

Нека $\lambda = 0$, тогава

(25) $\Delta\omega = \dfrac{2\pi\overline{\beta}}{kP}$.

Когато $\lambda \neq 0$, като заместим в интеграла (23) се получава:

(26) $\delta\varphi = \dfrac{\partial}{\partial G}\left(\dfrac{2m}{G}\int_0^\pi \dfrac{\overline{\beta}}{R^\lambda}d\varphi\right) = \dfrac{\partial}{\partial G}\left(\dfrac{2m\overline{\beta}}{GP^\lambda}\int_0^\pi (1+e\cos\varphi)^\lambda d\varphi\right)$.

Разлагаме подинтегралния израз на (26) и взимаме първите три члена:

$$(1+e\cos\varphi)^\lambda \approx 1+\lambda e\cos\varphi + \frac{\lambda(\lambda-1)}{2!}e^2\cos^2\varphi + \dots .$$

Тогава, за интеграла (26) записваме израза

(27) $\delta\varphi \approx \dfrac{\partial}{\partial G}\left(\dfrac{2m\overline{\beta}}{GP^\lambda}\int_0^\pi\left(1+\lambda e\cos\varphi+\dfrac{\lambda(\lambda-1)}{2}e^2\cos^2\varphi\right)d\varphi\right)$.

Вземат се под внимание формулите за интеграла на площта: $G^2 = mkP$ и интеграла

$$\int_0^\pi \cos^2\varphi d\varphi = \frac{\pi}{2}.$$

Окончателният израз който се получава е:

(28) $\Delta\omega = -\dfrac{2\pi(2\lambda+1)m^{\lambda+1}k^\lambda\overline{\beta}}{G^{2(\lambda+1)}} + O(e^2)$.

Така изразихме прецесията, за широк клас случаи с точност до втората степен на ексцентрицитета.
В конкретния случай

(29) $\delta U = -\dfrac{\mu m\varepsilon R_e^{\ 2}}{3R^3} - \dfrac{1}{2}\dfrac{\mu}{R^3}(B-A) - \dfrac{3}{2}\dfrac{\mu\varepsilon R_e^{\ 2}}{R^5}(B-A)$.

Очевидно, стойността на прецесията ще бъде сума от стойностите на прецесиите породени от членовете с различни степени на R. Достига се до израза

(30) $\Delta\omega = \dfrac{6\pi}{P^2}\left[\dfrac{\varepsilon R_e^{\ 2}}{3} + \dfrac{1}{2}\dfrac{(B-A)}{m}\right] + \dfrac{21\pi}{P^8}\dfrac{\varepsilon R_e^{\ 2}(B-A)}{m^4\mu^4}$.

Заключение

Методът на оскулиращите елементи значително облекчава аналитичния подход при изучаване траекторията на спътници. При движение в централно гравитационно поле, основна роля играят ексцентрицитета и прецесията на орбитата, като в разумни приближения се получават лесни за интегриране диференциални уравнения. В случая на централно действаща сила е възможно и да се изведе обща формула за намиране на прецесията на орбитата.

Литература:

1. Б е л е ц к и й, В. В., Движение искусственого спутника относительно центра масс. Наука. Москва,1965.
2. Б е л е ц к и й, В. В., Очерки о движении космических тел. Наука. Москва,1975.
3. Л а н д а у, Л., Л и ф ш и ц, Е., Теоретическая физика, т. I. Механика. Изд. "Наука", Москва, 1988.
4. Л и х т е н б е р г, А., Л и б е р м а н, М., Регулерная и стохастическая динамика. Мир. Москва, 1984.
5. M a r k e y e v, A. P., Non-linear oscillations of a satellite at 1:1:1 resonance. Journal of Applied Mathematics and Mechanics, 76, p.36-47, 2012.